

2016 年度入学試験問題(前期)

数 学 (問 題)

注 意

- 1) 数学の問題冊子は4ページあり，問題はⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの4題である。
- 2) 別に解答用紙1枚があり，解答はすべてこの解答用紙の指定欄に記入すること。
指定欄以外への記入はすべて無効である。
計算や下書きは問題用紙の白紙・空白部分を利用して行うこと。
- 3) 解答用紙の所定欄に受験番号を記入せよ。氏名を記入してはならない。
解答用紙の※印の欄には何も記入してはならない。
- 4) 問題冊子，解答用紙はともに持ち出してはならない。
- 5) 途中退場または試験終了時には，解答が他の受験生の目に触れないよう，解答用紙の上に問題冊子を重ねて，監督者の許可を得た後に退出すること。

I (1)~(6)の の中に、あてはまる数、角度、整式、不等式、記号、語句などを記入せよ。

(1) 次の式を因数分解せよ。

$$x(x+9)(x-4)(x-13)+2016 = \text{ア}$$

(2) 5つの選択肢の中から正解2つを解答する問題があり、2つの正解をどちらも正しく選んだ場合にのみ得点が与えられる。次の(i), (ii)において、与えられた条件以外は無作為に解答を選ぶとき、得点が得られる確率を求めよ。

(i) 2つの選択肢が誤っていることがわかっている場合 イ

(ii) 1つの選択肢が正解であることがわかっている場合 ウ

(3) 三角形ABCの辺AB上に $3\vec{AP} = \vec{AB}$ を満たす点Pを、辺BCの延長上に $2\vec{BQ} = 3\vec{BC}$ を満たす点Qをとる。ACとPQの交点Rについて、線分BRを $r:1$ に外分する点がAQ上に存在するとき、 r の値は エ である。

(4) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で定義される関数 $y = 4 \sin \theta (\cos \theta - \sin \theta)$ の値域は、 オ である。

(5) 次の2つの式の値を求め、 カ の指定欄にそれぞれ記入せよ。また、中央にはこれらの値の大小を評価して不等号記号を記入せよ。

$$A: \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}, \quad B: \log_3 \frac{2}{3} + 4 \log_4 \sqrt[4]{1024} - \frac{1}{2} \log_3 12$$

(6) xy 平面上で、不等式 $|x+1|+|y| < 2$ を満たす範囲をA、不等式 $|x-1|+|y| < 2$ を満たす範囲をBとする。さらに、 $|x| < 4$ かつ $|y| < 4$ を満たす範囲をCとするとき、 $\overline{A \cup B} \cap C$ を満たす範囲を キ に図示せよ。ただし、条件を満たす領域を斜線で明示することとし、境界上の点を含むときは実線を、境界上の点を含まないときは点線を用いて表記すること。

II a, m, k を正の定数とするとき、関数 $f(x)$ は次の条件を満たす関数である。

(i) 原点を通り、原点における接線の傾きが m である。

(ii) $x = a$ における接線の傾きが m であり、この接線の y 軸切片が k である。

(1) $f(x)$ の満たす条件を、 a, m, k を用いた数式で表すと次のようになる。

(i) $f(0) = \boxed{\text{ク}}$, $f'(0) = \boxed{\text{ケ}}$

(ii) $f(a) = \boxed{\text{コ}}$, $f'(a) = \boxed{\text{サ}}$

(2) $f(x)$ が (i), (ii) の条件を満たす、最も次数の低い多項式である時、この多項式を a, m, k を用いて表すと、 $f(x) = \boxed{\text{シ}}$ となる。

(3) n を正の定数とするとき、 $y = f'(x)$ と直線 $y = n$ とは、 $0 < x < a$ の範囲において、 n が $\boxed{\text{ス}}$ の範囲で交点を持つ。 n がこの範囲の値をとるとき、交点の x 座標の中で最も小さい値を α とし、 $y = f'(x)$ 、直線 $y = n$ 、 y 軸および直線 $x = a$ で囲まれた部分の面積 $S(\alpha)$ を a, k, α を用いて表すと $S(\alpha) = \boxed{\text{セ}}$ となる。

(4) $S(\alpha)$ は α が $\boxed{\text{ソ}}$ のときに、最小値 $\boxed{\text{タ}}$ をとる。

Ⅲ 複素数の数列 $\{z_n\}$ について、次の条件によって定義する。

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i, z_{n+1} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}i\right)z_n \quad \text{ただし, } n \text{ は自然数とする。}$$

(1) 複素数を $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ の極形式で表現すると、 $z_2 =$ であり、
 $z_3 =$ である。

(2) z_n の一般項を n を用いた極形式で表すと、 $z_n =$ となる。

(3) $\sum_{i=1}^n |z_i| =$ である。

(4) z_{3n} の一般項が であることを利用すると、
 $\sum_{i=1}^n z_{3i} =$ が成り立つ。

IV xy 平面上に、曲線 $C: x^2 - (y - 1)^2 = 1$ 、直線 $l_1: y = ax$ 、直線 $l_2: y = bx$ をとる。直線 l_1 、直線 l_2 はどちらも曲線 C とそれぞれ 2 つの交点を持つとき、次の問に答えよ。

(1) 曲線 C と直線 l_1 との 2 つの交点の x 座標がどちらも正である場合、 a のとり得る範囲は である。

(2) a が上記の条件を満たすとき、曲線 C と直線 l_1 との交点を P 、 Q とする。原点 O と 2 つの交点との距離 OP と OQ について、 $OP \cdot OQ$ を a を用いて表すと となる。

(3) 曲線 C と直線 l_2 との 2 つの交点の x 座標がどちらも負であるとき、この 2 つの交点を R 、 S とおく。 P 、 Q 、 R 、 S の 4 つの点が同一円周上にあるとき、 a と b との関係は である。

(4) この円を、 a を用いた xy 平面上の方程式で書き表すと となる。